固有振動数算出における計算時間の短縮に関する検討

横山　哲也

Study on Computation Time Reduction in Eigen Frequency Computation

Tetsuya YOKOYAMA

あらまし　機械構造物の振動解析を行うにあたり，固有振動数を知る必要がある．有限要素法を用いて機械構造物の固有振動数を求める際は，連立方程式を繰り返し解く必要があり，計算に時間を要する．本研究では，固有値振動数の算出にかかる計算時間の短縮を目的に，近似的な逆行列を用いて固有振動数が計算可能であるか検討を行った．

キーワード　固有値解析，共役勾配法，逆べき乗法

１．はじめに

機械構造物の振動解析を行うにあたり，固有振動数を知る必要がある．有限要素法を用いて固有振動数を求める場合，行列が疎となるため，行列ベクトル積による計算が主となる逆べき乗法やランチョス法などが利用される．上記手法は収束条件や指定回数を満たすまで一連の計算を繰り返す手法で，解析対象モデルの行列サイズが大きい場合は繰り返し計算の中で連立方程式を反復計算で解くことになり，計算に時間を要する．

そこで本報告では，固有振動数を求める過程の連立方程式を反復計算ではなく近似的な逆行列を用いて直接解くことで計算時間が短縮するか，既存手法との比較検討を行った．

２．数値計算による固有振動数計算

本報では，機械構造物の標準固有値問題を，既存手法と近似的な逆行列を用いた手法で解き，その比較を行う．本章では各計算手法について説明する．

２．１　機械構造物の固有値問題

機械系の振動は式(1)に示す一般固有値問題となる．

$$\mathbf{Kx} = \lambda \mathbf{Mx} \tag{1}$$

ここで$\mathbf{K}$は剛性行列，$\mathbf{M}$は慣性行列で対角行列，λは固有値，$\mathbf{x}$は固有ベクトルである．固有振動数f は

$$f = \sqrt{\lambda} / 2\pi \tag{2}$$

である．振動で問題となるのは低い固有振動数であることから，式(1)を，最小値を算出する標準固有値問題に変換する．行列$\mathbf{M}$の対角要素の平方根を対角要素とする行列$\mathbf{B}$を用いて，式(3)に標準固有値問題を示す．

$$(\mathbf{B}^{-\mathbf{T}}\mathbf{K}\mathbf{B}^{-1})^{-1}\mathbf{x} = \frac{1}{\lambda}\mathbf{x} \tag{3}$$

２．２　既存手法による固有値計算

行列$\mathbf{K}$が疎行列であることから，以下では行列ベクトル積で計算できる逆べき乗法を用いて標準固有値問題を解き，固有振動数を計算する．逆べき乗法の計算手順を以下に示す．

1) $\mathbf{x_0}$を適当にとる．ただし$|\mathbf{x_0}|=1$
2) $\mathbf{y_i} = \mathbf{B^T x_i}$
3) $\mathbf{K y'_{i+1}} = \mathbf{y_i}$
4) $\mathbf{x'_{i+1}} = \mathbf{B\, y'_{i+1}}$
5) $\mathbf{x_{i+1}} = \mathbf{x'_{i+1}} / |\mathbf{x'_{i+1}}|$
6) $\lambda_{i+1} = 1/\sqrt{(\mathbf{x_{i+1}}, \mathbf{x_i})}$
7) $|f_{i+1} - f_i| / f_{i+1} < \varepsilon$ であれば計算を打ち切る．そうでなければ2)に戻る．

上記計算手順の3)では連立方程式を解く．$\mathbf{K}$の逆行列を用いて連立方程式を解くことはできるが，逆行列は疎行列とならないため行列サイズがn行n列のときはn^2個の要素をメモリに格納する必要があり，nが大きい場合にはメモリ上にデータを持つことが難しく，かつ逆行列自体の算出にも時間を要する．そのため，3)では連立方程式を共役勾配法による反復計算で解く．以下ではこの手法を既存手法と呼ぶ．

上記1)～7)の計算手順における計算時間の多くは3)の連立方程式の解法に要しており，計算時間短縮には共役勾配法における反復計算の計算量を減らす必要がある．

２．３　近似的な逆行列を用いた固有値計算

固有振動数を計算するためには，上記計算手順に示すように固有振動数が収束するまで2)～7)を繰り返す必要がある．本研究では3)の連立方程式の解法において，前処理付き共役勾配法を用いて解く際の計算過程で求まるベクトルを基に作った近似的な逆行列[1]（以下，近似逆行列と呼ぶ）を利用することで，計算時間の短縮を図る．

係数行列$\mathbf{A}$，既知ベクトル$\mathbf{b}$，未知ベクトル$\mathbf{x}$の連立方程式$\mathbf{b=Ax}$における連立方程式を反復回数k回で計算した

ときの近似逆行列を式(4)に示す.

$$\mathbf{A}^{-1} \approx \mathbf{P_k}[\boldsymbol{\omega}]_\mathbf{k}^{-1}\mathbf{P_k^T} \tag{4}$$

式(4)中の各行列は以下のとおりである.

$$\mathbf{P_k} = [\mathbf{p_0} \mid \cdots \mid \mathbf{p_k}]$$

$$[\boldsymbol{\omega}]_\mathbf{k} = \begin{bmatrix} \omega_0 & & \\ & \ddots & \\ & & \omega_k \end{bmatrix}, \quad \omega_i = (\mathbf{p_i}, \mathbf{Ap_i})$$

$\mathbf{p_i}$は共役勾配法の計算過程で使用する修正方向ベクトルである．なお，反復回数kはベクトルサイズ以下である.

近似逆行列を用いた計算手順を以下に示す.

1) $\mathbf{x_0}$ を適当にとる．ただし$|\mathbf{x_0}|=1$
2) $\mathbf{y_i} = \mathbf{B^T x_i}$
3)' 1回目: $\mathbf{Ky'_{i+1}} = \mathbf{y_i}$
   2回目以降: $\mathbf{y'_{i+1}} = \mathbf{P_k}[\boldsymbol{\omega}]_\mathbf{k}^{-1}\mathbf{P_k^T}\,\mathbf{y_i}$
4) $\mathbf{x'_{i+1}} = \mathbf{B\,y'_{i+1}}$
5) $\mathbf{x_{i+1}} = \mathbf{x'_{i+1}}/|\mathbf{x'_{i+1}}|$
6) $\lambda_{i+1} = 1/\sqrt{(\mathbf{x_{i+1}}, \mathbf{x_i})}$
7) $|f_{i+1} - f_i| / f_{i+1} < \varepsilon$ であれば計算を打ち切る．そうでなければ 2)に戻る.

近似逆行列を算出するため，3)'で1回目だけ共役勾配法を用いて連立方程式を解き, 2回目以降は近似逆行列を用いて連立方程式を解く．これにより，2回目以降の繰り返し計算において，計算時間の短縮が見込まれる．なお,近似逆行列は逆行列と同じ行列サイズであるが, 3) 'に示すように近似逆行列を直接求めて計算してないため，メモリの制約は受けない.

近似逆行列は逆行列を近似的に求めているため，行列に誤差が含まれる．そのため，固有振動数を正確に求めるには，誤差の少ない近似逆行列を求める必要がある．そこで3) 'の1回目の共役勾配法による解法の収束判定条件を厳しく設定することで，誤差の少ない近似逆行列を求める．また，3) 'の1回目の共役勾配法の反復回数が多いと，その結果$\mathbf{p_k}$の行列サイズが大きくなりメモリを圧迫する．そのため，共役勾配法では前処理を施すことで反復回数を低減する.

３．検証

逆べき乗法による固有振動数の算出において，既存手法と近似逆行列を用いた手法とで計算時間の比較を行った．解析のモデルは文献[2]で使用しているシミュレーションのジグと被削材モデル(図1)を用いた．モデルの節点数は2万7千程度である．計算手順7)の収束判定条件の固有振動数の相対誤差 ε は1.0E-4とする.

逆べき乗法では最小固有値しか求めることはできないため，本研究では以下に示す減次を行い，最小値からの複数の固有値を求めた． 行列**A**の固有値 λ^1，固有ベクトル$\mathbf{x^1}$とした場合,

$$\mathbf{A'} = \mathbf{A} - \lambda^1 \mathbf{x^1 x^{1T}} \tag{6}$$

とすることで，行列**A**から固有値 λ^1に対応する成分を省くことができ, 複数個の固有値を計算することができる．ただし，減次を行った行列は要素が変化しているため，減次直後の1回目は連立方程式を共役勾配法で解く.

表1に計算時間と計算で求めた固有振動数の一例を示す．表中のケース1，2では，計算手順1)で異なる初期ベクトル$\mathbf{x_0}$を与えている．また，計算手順3) 'の1回目の共役勾配法の収束判定条件は実験的に求めた．表より近似逆行列による計算結果は既存手法で求めた固有振動数とほぼ同じで，計算時間は削減していることがわかる．与える$\mathbf{x_0}$によって計算時間の削減割合が変化するのは，計算手順2)～7)の繰り返し回数が$\mathbf{x_0}$によって異なるためと推測される．なお，繰り返し回数は7)の収束判定条件によっても変化する.

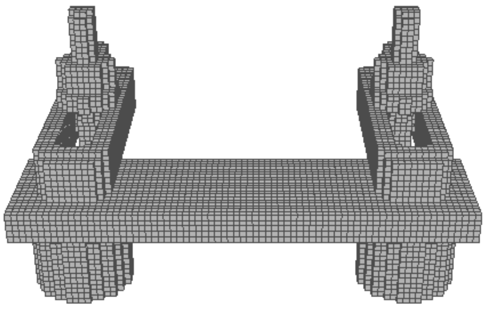

図1 解析モデル

表1 計算時間の比較

	ケース1		ケース2	
	既存手法	近似逆行列	既存手法	近似逆行列
計算時間※	1.0	0.15	1.0	0.22
固有振動数 [Hz]	1361 1382 1577	1361 1381 1577	1360 1384 1577	1363 1381 1578

※既存手法の時間で正規化した時間

４．まとめ

本報告では，固有振動数を求める過程の連立方程式を反復計算ではなく近似的な逆行列を用いて直接解くことで,既存手法に比べ計算時間が短縮するか検討を行った．逆べき乗において，検証で使用したモデルでは計算時間が短縮することがわかった．ただし，計算手順3) 'の1回目の共役勾配法による解法の収束判定条件が緩いと正確な固有振動数が求まらず，条件が厳しいと共役勾配法の反復回数が増えることでメモリ圧迫や計算時間の増加となるため，適切な収束判定条件の選択が課題である.

文　献

[1] 戸川隼人，“共役勾配法”，教育出版，1977.

[2] 横山哲也，“シミュレーション技術を用いたジグ設計検証手法の開発(第3報)”，岐阜県情報技術研究所研究報告　第16号，pp.49-51, 2015.