

# ヒューマノイドロボットの位置計測手法の提案

小川 行宏      山本 和彦\*      稲葉 昭夫

## A Positional Measurement Technique for Humanoid Robots

Yukihiro OGAWA    Kazuhiko YAMAMOTO\*    Akio INABA

あらまし 本報告では、ヒューマノイドロボットと対象物が同時に移動する場合について、ロボットに搭載されたカメラの画像情報を利用して、ロボットの自己位置と対象物の位置を計測するための手法を提案する。本手法は、フィールド内に複数の指標を設置し、対象物といくつかの指標をカメラで同時に認識することにより位置計測を行う。また、ロボットに組み込んで高速にリアルタイム処理することを考慮する。本手法に関して、位置の計測実験を行い、実際に使用可能な精度が得られることを確認した。

キーワード ヒューマノイドロボット、画像処理、ステレオ視、位置検出、移動物体

### 1. はじめに

ヒューマノイドロボットが自律行動を行うためには、周囲の環境を把握し、その状況に対応する必要がある。逐次環境が変化する中で重要となるのが、ロボットが移動しながら対象物を捕捉するとともに、自己位置と移動する対象物の位置を計測することである。環境を把握する上で有用なセンサとして、視覚センサがあげられる。

これまでに、ロボットのカメラ画像を利用し、画像処理技術を用いた位置計測の研究が多く行われている。しかし、カメラ画像の情報を有効に利用するためには、いくつかの問題が存在する。歩行動作に伴いヒューマノイドロボット本体が左右上下に揺動し、対象物体の位置や姿勢が、ロボットのカメラ画像の中では、大きく変化するため、連続した時系列のデータ処理を行うことが難しい。また、カメラの取り付け位置情報に関しても各関節間の機構の誤差や動作に伴うたわみにより精度よく取得することは難しい。さらに、ヒューマノイドロボットの移動における位置精度が十分でないため、一度位置を計測すればよいわけではなく、随時位置を計測し、フィールドバックを行う必要がある。

本報告では、ヒューマノイドロボットにおいて、ロボットと対象物が同時に移動する場合について、ロボットに搭載されたカメラの画像情報を利用して、ロボットの自己位置と対象物の位置の計測するための手法を提案する。さらに、本手法をロボットに組み込んで高速にリアルタイム処理することを考慮する。

本手法では、フィールド内に複数の指標を設置し、対象物と複数の指標をカメラで同時に認識することにより位置計測を行う。対象物や指標のカメラ座標系における

位置の把握には、ステレオ視の技術を利用して3次元の位置情報を取得する。各位置情報を3次元座標として扱うことにより、単純な演算を行うだけ、各位置関係を高速に求めることが可能となる。

### 2. 対象とするロボットの動作

本報告では、以下の動作を対象とする。

- ・ ロボット自身が移動しながら、移動する対象物の位置を計測
- ・ 目標となる位置(対象物の近く)に移動

このような動作において、ロボットの行動計画は2つのフェーズに分けることができる。対象物の近くまで移動するための大域的な行動計画と対象物に近接している場合の局所的な行動計画である。

大域的な行動計画は、ロボットと対象物が離れた位置にある場合にどのような経路で対象物に近づくかを計画するものである。フィールド全体の情報を元に計画し、フィールド上でのロボットと対象物のおおよその位置関係を計測すればよい。



図1 ヒューマノイドロボット「ながら-3」

\* 岐阜大学 工学部 応用情報学科

また、局所的な行動計画は、ロボットと対象物が近接している位置にある場合に、ロボットと対象物の情報のみを使用して、対象物に対する行動を行うための微調整を行うための行動計画である。この場合は、ロボットと対象物の相対位置関係にある程度正確に計測する必要がある。

このように、各行動において必要な情報や精度が異なることから、それぞれの状況に応じた位置計測手法を用いることとする。

また、本報告におけるロボットのプラットフォームとしてヒューマノイドロボット「ながら-3」<sup>[1,2]</sup>(図1)を利用し、移動する対象物(例えば人, ボール等)に対して、ロボットが近づき、対象物に対して行動(握手, ボールを蹴る等)することを動作対象とする。

### 3. 位置計測手法

ロボットに搭載されたカメラから得られた画像情報を用いて、ロボットが移動しながら対象物を捕捉するとともに、ロボットの自己位置と移動する対象物の位置を計測することを目的とする。また、ロボットの動作に反映するために対象物の動作経路を予測する。

#### 3.1 位置計測の概要

大域的な行動計画のためには、フィールド(グローバル座標系)におけるロボットの自己位置と対象物の位置を求めればよい。また、それぞれの情報を求めるためには、ロボット座標系とカメラ座標系の位置関係が密接に関係する。

ロボット座標系とカメラ座標系の位置関係は、カメラのキャリブレーションを行い、ロボットの各関節に関する順運動学を解くことにより求めることは可能であるが、ロボットは多自由度であり、各関節間の機構の誤差や、動作に伴うたわみにより、順運動学を解いて得られた解は、十分な精度を確保することは難しい。しかし、大域的な行動計画の時には、厳密なロボット位置精度は要求されない。そのため、本手法では図2(a)に示すように、カメラ座標系をフィールド上に垂直投影した位置をロボットの座標系とみなすこととする。

グローバル座標系におけるロボットの自己位置については、初期位置がわかればロボットの移動距離に応じて計算可能である。しかし、ロボットの移動精度が十分でないため、移動による誤差が蓄積し、精度良く位置情報を取得することができない。そのため、随時ロボット自己位置を計測することが必要となる。また、歩行動作に伴いヒューマノイドロボット本体が左右上下に揺動し、対象物体の位置や姿勢が画像の中で大きく変化するため、従来の固定カメラによる画像処理、計測技術をそのまま適用することは難しい。そこで、グローバル座標系において位置が既知の指標を用いることにより、グローバル座標系とカメラ座標系の位置関係を計測することでロボ

ットの自己位置を算出する。

カメラ座標系と対象物の位置関係を画像情報等により把握する技術は、これまで多くの手法が提案されている<sup>[3,4,5]</sup>。これらの手法は、1つのカメラと指標を使用してカメラと指標の位置関係を求めるものであり、途中に繰り返し演算が行われたり、複雑な画像の処理を行っていたりするため、ロボットに組み込んで処理することは困難である。

本手法では、ステレオ視を用い指標を3次元座標として扱うことにより、3つの指標のみで単純な行列演算により計算する。

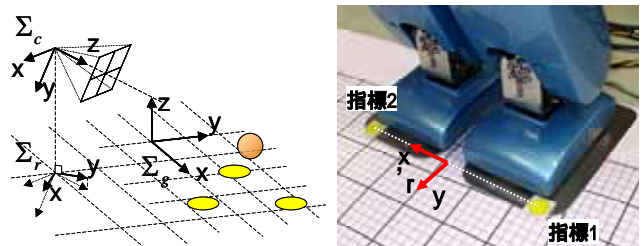
グローバル座標における対象物の位置は、画像処理によりカメラ座標系における対象物の位置を得ることが可能であり、カメラ座標系とロボット座標系の位置関係が求まっていれば計算することができる。図2(a)に座標系の関係を示す。グローバル座標系を  $g$ , ロボット座標系を  $r$ , カメラ座標系を  $c$  である。

局所的な行動計画のためには、ロボットと対象物の相対位置関係を求めればよい。この場合、ロボットの足元に指標を設置し、足元の指標と対象物の相対位置関係を求めることにより、ロボットと対象物の相対位置関係を求める。本手法では図2(b)に示すようにロボット本体に指標を2つ設置し、2つ指標の midpoint を局所的なロボット座標系 ( $r$ ) と設定して相対位置関係を計算する。

#### 3.2 大域的な位置計測手法

大域的な位置計測は、 $g$  における対象物・ロボットの位置を求めることが目的である。本手法では、フィールド上に指標を設置し、対象物と指標の位置をカメラにより同時に認識することにより行う。この時、フィールド上に設置する指標は  $g$  における位置が既知の3つとする。

図3に位置計測手法の流れを示す。まず、2つのカメラ画像から、色抽出処理、ラベリング処理、ラベルごとの重心計算により、対象物と3つの指標の画像情報を同時に



(a) 大域的な位置検出 (b) 局所的な位置検出  
図2 座標系の関係

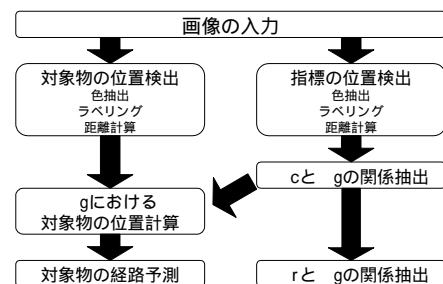


図3 位置計測の流れ

取得する。この時、左右画像における3つの指標の対応について、指標の位置関係により指標の対応付けを行う。取得した各画像座標情報を用い各点の c における3次元位置を計算する。図4に画像処理結果を示す。画像処理した結果、得られた画像座標に×印を示す。また、対応付けされた指標にはそれぞれラベルをつけてある。

計算式の詳細は付録に述べるがここでは概要を述べる。ある点の各座標系における座標値を(x,y,z)[ c ], (X Y Z)[ g ], (Rx,Ry,Rz)[ r]とする。cとgにおける指標の位置から、座標系の関係式を求める。cの座標(x y z)とgの座標(X Y Z)の変換は、回転・移動成分を持つ変換式で表せる(式1)。

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \mathbf{R} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \mathbf{T} \quad \dots \dots \dots (1)$$

また、rとcの関係は既知であるため、rとgの関係を求めることもできる。cのz軸方向ベクトルを、gに射影したものがrのy軸方向となるため、回転行列成分Rの3列目、移動成分の値を使用して、式2となる。

$$\begin{pmatrix} Rx \\ Ry \\ Rz \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} Tx \\ Ty \\ 0 \end{pmatrix} \quad \dots \dots \dots (2)$$

但し、 $\theta = \tan^{-1}(r_{13} / r_{23})$

対象物においては、cとgの関係式を用いることによりgにおける位置を計算できる。これらの演算は座標位置をベクトルで扱い、行列演算により簡単に演算することが可能である。

### 3.3 対象物の経路予測

対象物と指標をカメラで同時に取得することができれば、ロボットが移動したり、画像が揺れたりしても対象物のgにおける位置は取得することができる。リアルタイムに位置を取得できれば、時系列データを用いて、対象物の動作予測を行うことが可能である。

対象物位置の予測には対象物が停止しているか、移動しているかの検出が必要になる。本手法では、対象物の位置をリアルタイムに計測することが可能であるため、過去のgにおける位置の平均値と現在の座標位置を比較し、一定以上の移動量があれば移動したことにより、対象物の停止・移動の判別を行う。また、本手法では、ロボットに向かって転がるボールを対象としているため、時系列の位置データから、最小二乗法を用いた直線検出により、ボールの経路を予測する。

### 3.3 局所的な位置計測手法

局所的な位置計測は、対象物とロボットの相対位置を求めることが目的である。対象物とロボットが近接する場合には、ロボットが足元を見て位置を確認するものとし、カメラが真下を見る前提とする。図5に実際にカメラから得られた画像を示す。指標間の距離はロボット本体に設置するため既知である。

まず、1つのカメラ画像から対象物と指標の画像座標に

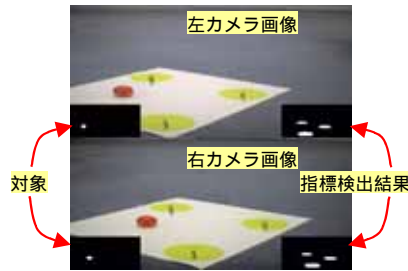


図4 画像処理結果

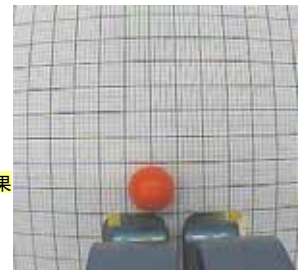


図5 足元の様子(左カメラ画像)

における位置を計測する。色抽出処理、ラベリング処理により、対象物と2つ指標の画像情報を同時に取得する。画像座標と指標間の距離を用いることにより、対象物とロボットの相対位置が一意に求まる。

### 3.4 位置計測手法における高速化

本手法における高速化について述べる。画像から色情報を使用した対象物・指標検出を行うことにより、テンプレートマッチングなどのその他の検出手法に比べて、速度が向上する。

また、カメラから得られた画像は、カメラのレンズ歪が生じるため、通常は得られた画像に対して歪補正処理を行う。本手法では、歪補正を簡略化することで高速化を図る。ラベルごとの重心計算を行った後に重心の値に対してのみ歪補正を行う。これにより、通常は取得した全画素に対して行う歪補正の処理を、抽出した対象物と指標の画像座標に対してのみに削減できる。

さらに、座標系の関係演算においては、3×3の単純な行列演算(乗算・逆行列演算)のみで計算可能である。そのため、途中で繰り返し演算が行われたり、複雑な画像の処理を行ったりする必要がない。

処理の高速化によりリアルタイムに位置計測を行うことが可能となり、位置計測結果を利用したロボットのフィードバック制御に十分な速度が得られる。

## 4. 実験

大域的・局所的な位置計測手法のそれぞれについて実験を行った。

### 4.1 実験環境

実験ハードウェアはヒューマノイドロボット「ながら-3」とし、搭載されているカメラ(MSC-55:㈱モスウェル製)と画像処理ユニット(NVP-930N:㈱ルネサス北日本セミコンダクタ製)を用いる。画像処理ユニットは、2つのNTSC信号を同時に入力可能なものである。

フィールドには指標として円形のプレートを、対象物としてボールを設置する。また、カメラの画像内に指標と対象物が入るような状況を想定する。また、格子状のシートを敷き、指標、ロボット、ボール等の設置位置を計測し比較を行った。図6に実験の様子を示す。

指標はどの方向から見ても同じ形状にするため、3点の指標がほぼ正三角形になるように、グローバル座標系に

において $P_0(0,0,0)$ 、 $P_1(-250,400,0)$ 、 $P_2(250,400,0)$ の座標に設置した。単位はmmである。

使用する画像サイズは512ピクセル×240ピクセルの画像を用いる。今回使用する画像処理ユニットでは、画素の情報がYUV422の形式で保存され、横方向の色情報が半分になる。また、画像メモリのサイズが256×256であることから、色情報の画像処理を画像メモリサイズに合わせるために、このサイズを採用する。

#### 4.2 位置計測手法の基礎実験

位置計測手法についての基本的な性能を検証した。本節では処理速度に関する実験と、対象物、ロボット共に停止した状態における位置計測精度について実験した。

##### 4.2.1 処理速度

本手法を実装し処理速度を測定した結果、約15.0fps(フレーム/秒)で計測可能であった。ロボットがリアルタイムにデータを取得するのに十分な速度である。

##### 4.2.2 ロボットの大域的な位置計測精度

指標を固定し、ロボットの位置を一定間隔で移動した時の、ロボットのグローバル座標位置を求めた。ロボットの位置は、格子状のシート位置から測定し、初期位置は  $g$ において(73, -768, 0)とし、 $x$ 方向に-300mmから+400mm、 $y$ 方向に-800mmから0mm移動した。1箇所につき32回データを取得した。

計測値と設置位置の結果を図7に示す。また、最も近い指標( $P_0$ )までの距離に応じた計測値と設置位置の誤差比較を表1に示す。

全体の平均誤差を見ると設置位置との誤差が約35mmと、ほぼ正確に位置を計測できている。また、距離の計測にステレオ視による三角測量を使用しているため、指標までの距離に応じて平均・最大誤差が大きくなる傾向が出ている。

図7の左右の端になるほど、位置精度が悪くなる。これは、指標の一部が取得した画像の端に近くなるため、画像の歪を補正しきれなかった部分が影響しているものと推測できる。

また、誤差の分布について $x$ 方向の誤差が $y$ 方向に比べて約2倍程度大きい。これは、画像の歪補正の影響であると考えられる。条件によっては誤差が大きくなる傾向があるので、ロボットが停止している場合や、多少の時間遅れが許容される場合には、平均を用いることで位置の計測の精度向上が期待できる。

##### 4.2.3 対象物の大域的な位置計測精度

ロボット位置・指標を固定し、対象物を移動した場合の、対象物のグローバル座標位置を求めた。ロボットの位置は、前節で比較的誤差の少ない中心付近の  $g$ における(-60, -1018, 0)とした。対象物は $x$ 方向に-600mmから+500mm、 $y$ 方向に-400mmから800mm移動した。1箇所につき32回データを取得した。

対象物の位置計測値の結果を図8に示す。計測値と設置位置の誤差は、平均で14.54mm、最大89.57mmであった。

ステレオ視の距離精度が影響し、ロボットの位置から対象物の位置が離れると精度は悪くなるが、位置計測精度としては問題の無い範囲である。

#### 4.2.4 対象物の局所的な位置計測精度

ロボットの位置を固定し、足元を見た状態において、局所的な対象物位置計測の実験を行った。対象物を一定の間隔で移動させた場合の、ロボット座標における対象物の位置を計測した。



図6 実験の様子

表1 計測値と設置位置の誤差比較(単位はmm)

指標までの距離	平均誤差	最大誤差
~ 1000	25.9	92.6
1000 ~ 1200	32.8	93.0
1200 ~ 1500	47.7	157.0
1500 ~	54.0	221.1
全体	34.1	221.1

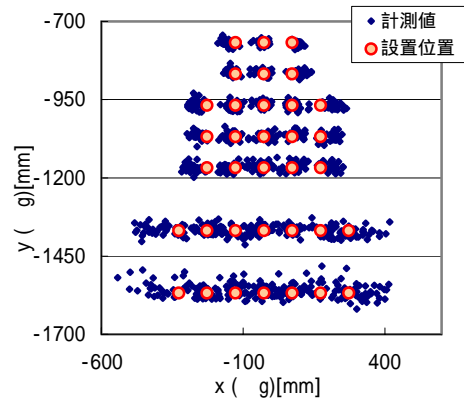


図7 ロボットの大域的な位置検出結果

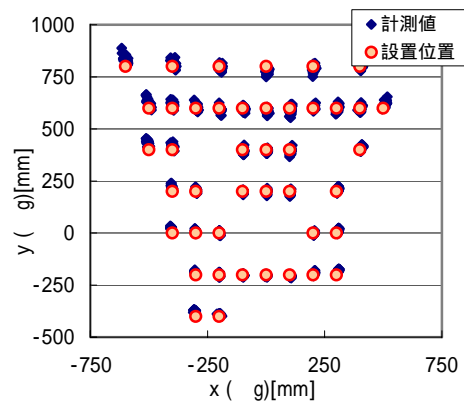


図8 対象物の大域的な位置検出結果

図9に計測結果を示す。設置位置との誤差が全体で平均約8.3mm,最大約31mmと,カメラ歪の影響により計測データに歪成分が多少残っているが,ほぼ正確な位置を計測できることが確認できた。

#### 4.3 移動に対する検証実験

基礎実験において,対象物やロボットの位置を固定し,手法の精度検証を行った。本節では,リアルタイムに対象物やロボットを移動させ,対象物の位置・ロボットの自己位置が計測可能か,対象物の経路予測が可能かについて実験を行った。

##### 4.3.1 対象物停止・ロボット移動

対象物の位置を固定し,ロボットを移動させた場合の対象物の位置・ロボットの自己位置を計測した。ロボットの移動は,足踏み,前後移動,旋回,サイドステップなどを行った。ロボットの移動は,指標が視野角に入るような移動とし,700mmから1300mm程度はなれたところとする。ロボットの自己位置に関しては,多少の時間遅れを許容し,8フレームのデータの平均値を用いる事とする。

ロボットが各動作を行った時の対象物の gにおける計測値と設置位置の誤差を表2に示す。また,ロボットが移動した場合の自己位置の一例として,ロボットが前進4歩,後退4歩を行った場合のロボットの gにおける位置を図10に示す。

ロボットが動作を行った場合でも,平均で約11.5mmと対象物の位置精度は良い。また,ロボットの自己位置に関して,歩行中は頭部が左右に揺動するため,x軸方向に揺れの要素が含まれているが,ある程度正確な位置を計測できていることがわかる。

##### 4.3.2 対象物移動・ロボット停止

ロボットの位置を固定し,ボールを対象物として移動させた場合の位置を計測した。初期状態はボールを停止した状態で,人がボールを蹴ることにより対象物を移動した。比較のための対象物の位置については,取得した画像から値を目視により読み取った。

対象物の停止・移動の検出については,基礎実験における最大誤差が100mm以内であることを考慮して過去の対象物の平均位置と計測した位置の差が100mm以上になった場合に,対象物が移動したと判断した。過去の平均位置は約1秒前から0.5秒前までの8フレーム分のデータを利用した。また,予測経路は,検出直前のフレームの時間を0秒として,対象物の移動を検出後の8フレーム分位置データを使用して行った。

図11に対象物の位置を移動検出前と移動検出後でプロットした動的な対象物の位置検出結果の一例を示す。目視による対象物の位置を直線で示した。

ほぼ正確な値を検出できていることがわかる。移動検出後の値で最後の方は対象物の一部が画像からフレームアウトしているため,検出した値が直線から外れている。

図12に経路の予測結果の一例を示す。横軸を時間軸とした予測経路と目視による計測経路を示す。この予測経

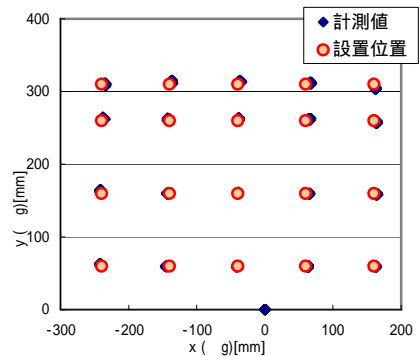


図9 対象物の局所的な位置検出結果

表2 対象物の計測値と設置位置の誤差比較(単位はmm)

ロボット動作	平均誤差	最大誤差
足踏み	9.1	31.9
左右旋回	9.9	32.6
前後移動	10.3	65.1
サイドステップ	11.5	50.6
全体平均	11.5	65.1

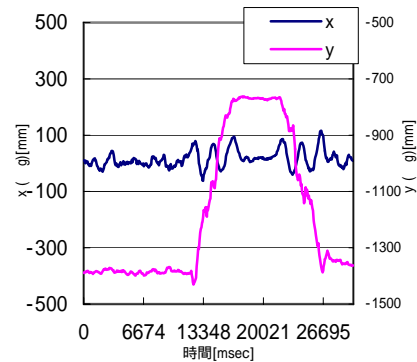


図10 ロボットが移動した場合のロボット位置検出結果

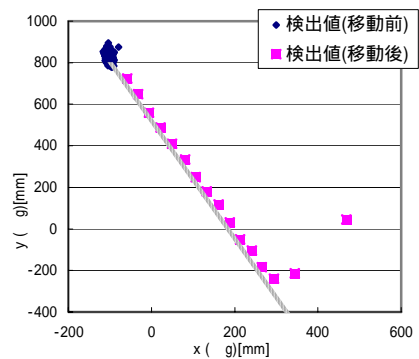
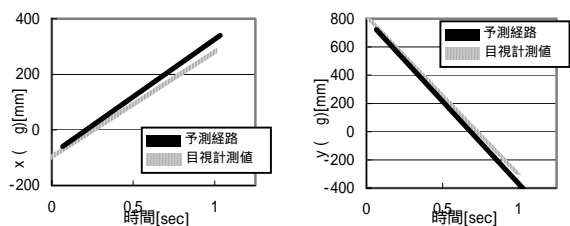


図11 動的な対象物の位置検出結果の一例



(a) x軸方向 (b) y軸方向  
図12 動的な対象物の位置検出結果の一例

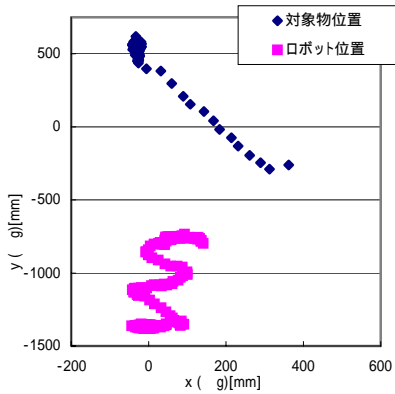


図13 対象物・ロボットを共に移動した結果の一例

路は使用したフレーム数に依存するが、移動検出後、8フレーム分のデータでほぼ正確に予測することができた。実験によっては移動の検出に遅れがあり、時間分遅れた経路を予測する場合もあった。

#### 4.3.3 対象物移動・ロボット移動

対象物・ロボットを共に移動させた場合の実験を行った。実験結果の一例として、図13に前進しながら対象物が移動する場合について、gにおける計測位置結果を示す。対象物の位置、対象物の停止・移動の検出、ロボットの自己位置など、全般的にほぼ正確な値を得ることができた。

### 5. まとめ

ヒューマノイドロボットと対象物が同時に移動する場合について、ロボットに搭載されたカメラの画像情報を利用して、ロボットの自己位置と対象物の位置の計測するための手法を提案した。本手法では、フィールド内に複数の指標を設置し、対象物と3つの指標をステレオ視の技術を利用して3次元の位置情報を取得することにより、単純な演算を行うだけで、各位置関係を高速に求めることが可能となった。また、実際にヒューマノイドロボット「ながら-3」を用い、ロボットの移動により画像が揺れた場合でも位置を取得できることを確認した。今後の課題は、指標の数を増やし動的に指標を選択することにより、広いフィールドに対して本手法を適用することである。

### 謝 辞

本研究は、NEDO（新エネルギー・産業技術総合開発機構）の「次世代ロボット実用化プロジェクト（プロトタイプ開発支援事業）」の採択を受けて実施しました。

### 文 献

- [1]稲葉昭夫, 光井輝彰, 久富茂樹, 小川行宏, 今井智彦, 中原健司, “ヒューマノイドロボット「ながら-3」の開発”, 第6回システムインテグレーション部門学術講演会(SI2005), pp. 409-410, 2005
- [2]小川行宏, 稲葉昭夫, “移動物体の位置検出手法の検討”, 岐阜県生産情報技術研究所報告No6, pp. 27-28, 2005
- [3]出口光一郎, 多田羅哲夫, “画像合成のための高速・簡易カメラキャリブレーション”, 計測自動制御学会論文誌, Vol. 31, No. 8, pp. 1015-1022, 1995
- [4]高橋章, 石井郁夫, 牧野秀夫, 中静真, “人工現実感インターフェースのための嘆願画像からのマーカー位置と姿勢の計測”, 電子情報通信学会論文誌, Vol. J79-A, No. 3, pp. 804-812, 1996
- [5]加藤博一, Mark Billingham, 浅野浩一, 橋啓八郎, “マーカー追跡に基づく拡張現実感システムとそのキャリブレーション”, 日本バーチャルリアリティ学会論文誌, Vol. 4, No. 4, 1999

### 付 録

各座標系における指標の座標位置を $gP_i, cP_i$  (但しg: グローバル座標, c: カメラ座標,  $i=\{0,1,2\}$ ), 各ベクトル及び外積を下記のように表す。

$$\begin{cases} {}_gP_i = (X_i, Y_i, Z_i)^T = \mathbf{X}_i \\ {}_cP_i = (x_i, y_i, z_i)^T = \mathbf{x}_i \end{cases}$$

但し、g: グローバル座標系, c: カメラ座標系,  $i = \{0,1,2\}$

$$\begin{aligned} \frac{{}_gP_0 \cdot {}_gP_1}{{}_gP_0 \cdot {}_gP_1} &= \mathbf{X}'_1, \quad \frac{{}_gP_0 \cdot {}_gP_2}{{}_gP_0 \cdot {}_gP_2} = \mathbf{X}'_2, \quad \frac{({}_gP_0 \cdot {}_gP_2 \times {}_gP_0 \cdot {}_gP_1)}{({}_gP_0 \cdot {}_gP_2 \times {}_gP_0 \cdot {}_gP_1)} = \mathbf{X}'_3 \\ \frac{{}_cP_0 \cdot {}_cP_1}{{}_cP_0 \cdot {}_cP_1} &= \mathbf{x}'_1, \quad \frac{{}_cP_0 \cdot {}_cP_2}{{}_cP_0 \cdot {}_cP_2} = \mathbf{x}'_2, \quad \frac{({}_cP_0 \cdot {}_cP_2 \times {}_cP_0 \cdot {}_cP_1)}{({}_cP_0 \cdot {}_cP_2 \times {}_cP_0 \cdot {}_cP_1)} = \mathbf{x}'_3 \end{aligned}$$

$\Sigma_c$ におけるある座標  $\mathbf{x}=(x, y, z)^T$ は

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= a\mathbf{x}'_1 + b\mathbf{x}'_2 + c\mathbf{x}'_3 + \mathbf{x}_0 = (\mathbf{x}'_1 \quad \mathbf{x}'_2 \quad \mathbf{x}'_3)(a \quad b \quad c)^T + \mathbf{x}_0 \\ (a \quad b \quad c)^T &= (\mathbf{x}'_1 \quad \mathbf{x}'_2 \quad \mathbf{x}'_3)^{-1}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \end{aligned}$$

以下のベクトルの関係式が成り立つため

$${}_gP_0 \cdot {}_gP_1 = {}_gP_0 \cdot {}_gP_1 = {}_cP_0 \cdot {}_cP_1 \quad {}_gP_0 \cdot {}_gP_2 = {}_cP_0 \cdot {}_cP_2$$

cにおける座標 $\mathbf{x}=(x, y, z)^T$ の gにおける位置 $\mathbf{X}=(X, Y, Z)^T$ は同様に

$$\begin{aligned} \mathbf{X} &= \mathbf{X}_0 + a\mathbf{X}'_1 + b\mathbf{X}'_2 + c\mathbf{X}'_3 \\ &= \mathbf{X}_0 + (\mathbf{X}'_1 \quad \mathbf{X}'_2 \quad \mathbf{X}'_3)(a \quad b \quad c)^T \\ &= \mathbf{X}_0 + (\mathbf{X}'_1 \quad \mathbf{X}'_2 \quad \mathbf{X}'_3)(\mathbf{x}'_1 \quad \mathbf{x}'_2 \quad \mathbf{x}'_3)^{-1}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \end{aligned}$$

となる。式を変形すると下記変換式が求まる。

$$\begin{aligned} \mathbf{X} &= \mathbf{R}\mathbf{x} + \mathbf{T} \quad \text{但し,} \\ \mathbf{R} &= \begin{pmatrix} X'_1 & X'_2 & X'_3 \\ Y'_1 & Y'_2 & Y'_3 \\ Z'_1 & Z'_2 & Z'_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'_1 & x'_2 & x'_3 \\ y'_1 & y'_2 & y'_3 \\ z'_1 & z'_2 & z'_3 \end{pmatrix}^{-1} \\ \mathbf{T} &= \begin{pmatrix} X_0 \\ Y_0 \\ Z_0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} X'_1 & X'_2 & X'_3 \\ Y'_1 & Y'_2 & Y'_3 \\ Z'_1 & Z'_2 & Z'_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'_1 & x'_2 & x'_3 \\ y'_1 & y'_2 & y'_3 \\ z'_1 & z'_2 & z'_3 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$