

立体紙製品の構造解析に関する研究

川島義隆 西村太志 手塚 明*

Research on Structural Analysis of Paper Ware

Yoshitaka Kawashima Futoshi Nisimura Akira Tezuka*

あらし 現在、包装容器や緩衝材はプラスチック製品が主流であるが、リサイクルしやすく、かつ生分解性である紙製品が注目されつつある。しかし、それらの強度設計は試行錯誤で行われており、効率的な設計方法が望まれている。本研究では、段ボール製緩衝材の力学特性の解析を目的に、段ボールの段の周期的構造に着目して、複合材料の解析で使われる均質化法の適用を試みた。その結果、有限要素モデルとしては段ボールの1段と緩衝材全体の両者の有限要素モデルのみで、段ボールのような多数の段を有する製品の解析が可能となった。これにより、均質化法の有効性を確認することができ、段ボール製品の構造解析への1つのアプローチとなることができた。

キーワード 紙、段ボール、緩衝材、有限要素法、構造解析、均質化法

1. まえがき

現在、工業製品などの輸送や保管に使われる包装材料には発泡スチロールなどのプラスチック製品が多く使用されている。しかし、「容器包装リサイクル法」の施行に伴い、容器包装の利用者・製造者はその使用量（製造量）に応じて再商品化（リサイクル）の義務が生じるため、リサイクルコストが安い紙製の包装容器や緩衝材が使われることが多くなってきている。さらに、それらは木材パルプが主原料であり、生分解性であるため環境保護の面からも注目されている。紙製の包装材料として、従来から段ボールや鶏卵トレイなどがあるが、最近の傾向としては電気製品や工業部品などの精密機械を包装するための緩衝材に使用されることが多くなってきている。従って、正確な強度設計（緩衝設計）が必要とされるが、その設計は試行錯誤で行われているのが現状であり、その非効率さがコストの上昇を招いている。本研究では、緩衝材や包装容器等の立体形状を持つ紙製品の効率的な強度設計をするための一つのアプローチとして、有限要素法などの構造解析手法を用いてコンピュータシミュレーションによる力学的特性の解析を行う。

今年度は既存の段ボール技術を用いて安価に製造でき、今後需要が増えると思われる段ボール製緩衝材の静的力学特性の解析を行う。段ボール製品の構造解析をする場合、その解析領域には段が多数存在することとなり、有

限要素モデルを作成する際には、段一つ一つに対してメッシュを切る必要が生じる。そのため、有限要素モデルの作成や境界条件の設定など非常に手間がかかるものとなる。近年、このような微細な構造を持つ構造物の解析には均質化法が使われることが多くなってきているが、紙製品への応用した例はなく、そのため、段ボール製緩衝材の解析において均質化法の適用を試みる。

2. 均質化法

2.1 理論

均質化法[1],[2]は図1のような周期性を持った微視的構造からなる複合的な構造物（例えば、不均質な複合材料など）を等価で均質な構造物として置き換えることにより、微視的構造を考慮しながら巨視的構造の解析を行うことができる。ここで、図1のような微視的構造の一周期にあたる構成単位をユニットセルと呼ぶ。

構造物の全体（図2）を記述する巨視的な座標系を x 、微細な構造（図3）を記述する微視的な座標系を y とすると、巨視的構造物と微視的構造との大きさの比を表すを介して次式が成り立つ。

$$y = \frac{x}{e} \quad (1)$$

また、図1のような構造物を解析対象とした時、領域において、作用する物体力を f 、境界 Γ に作用する表面力を t とすると、仮想仕事の原理は次式のように表される。

*独立行政法人 産業技術総合研究所
National Institute of Advanced Industrial Science and
Technology (AIST), Independent Administrative

$$\int_{\Omega^e} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right)^t D_{ijkl}^e \frac{\partial u_k^e}{\partial x_l} d\Omega = \int_{\Omega^e} v_i^t f_i^e d\Omega + \int_{\Gamma} v_i^t t_i d\Gamma$$

$$\forall v \in V^e \quad (2)$$

ここで、

D_{ijkl}^e : 弾性テンソル、 v_i : 仮想変位、
 u^e : 微視的構造を考慮した複合構造の変位

また、応力 - ひずみ、ひずみ - 変位の関係は次のように表される。

$$e_{kl}^e = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_k^e}{\partial x_l} + \frac{\partial u_l^e}{\partial x_k} \right) \quad (3)$$

$$s_{ij}^e = D_{ijkl}^e e_{kl}^e \quad (4)$$

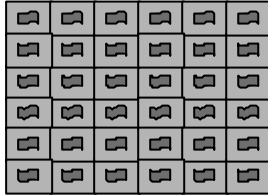


図1 微視的構造を伴った複合構造物

Fig.1 Composite structure with microscopic structures

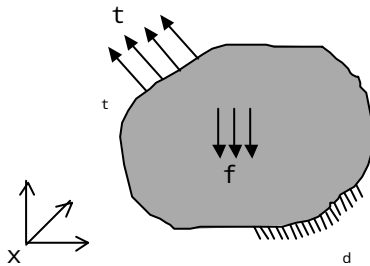


図2 巨視的構造 (全体構造)

Fig.2 Macroscopic structure (Global structure)

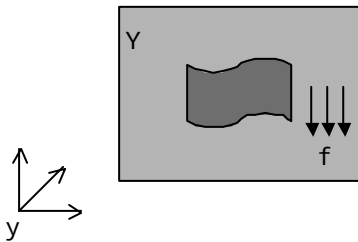


図3 微視的構造 (ユニットセル)

Fig.3 Microscopic structure (unit cell)

微視的構造からなる構造物の変位 u は次のように漸近展開できる。

$$u_i^e = u_i(x, y) = u_i^0(x, y) + \mathbf{e}^1(x, y), y = \frac{x}{\mathbf{e}} \quad (5)$$

また、 Y - 周期関数 $\Psi(y)$ に関して次の式が成り立つ。

$$\lim_{\mathbf{e} \rightarrow 0^+} \int_{\Omega^e} \Psi \left(\frac{x}{\mathbf{e}} \right) d\Omega \rightarrow \frac{1}{|Y|} \int_{\Omega} \int_Y \Psi(y) dY d\Omega \quad (6)$$

式(5)を式(2)に代入して整理し、極限 0 により式(6)を適用すると、巨視的な部分と微視的な部分が混在した式(2)を微視的構造を表す式(7)と巨視的構造を表す式(8)に分離することができる。

$$\int_Y \left(\frac{\partial v_i(y)}{\partial y_j} \right)^t D_{ijpm} \frac{\partial \mathbf{c}_p^{kl}}{\partial y_m} dY = \int_Y \left(\frac{\partial v_i(y)}{\partial y_j} \right)^t D_{ijkl} dY$$

$$\forall v \in V_Y \quad (7)$$

$$\int_{\Omega} \left(\frac{\partial v_i(x)}{\partial x_j} \right)^t D_{ijkl}^H(x) \frac{\partial u_k^0(x)}{\partial x_l} d\Omega$$

$$= \int_{\Omega} v_i^t(x) b_i(x) d\Omega + \int_{\Gamma} v_i^t(x) f_i(x) d\Gamma$$

$$\forall v \in V_{\Omega} \quad (8)$$

ここで、

$$b_i(x) = \frac{1}{|Y|} \int_Y f_i dY \quad (9)$$

$$D_{ijkl}^H(x) = \frac{1}{|Y|} \int_Y \left(D_{ijkl} - D_{ijpm} \frac{\partial \mathbf{c}_p^{kl}}{\partial y_m} \right) dY \quad (10)$$

である。式(10)は巨視構造における等価材料定数を求める式であり、均質化弾性テンソルと呼ばれる。

また、微視的構造を考慮した変位 u 、ひずみ、応力 は次式で求めることができる。

$$u^e = u^0(x) - \mathbf{e} \mathbf{c}^{kl}(x, y) \frac{\partial u_k^0(x)}{\partial x_l} \quad (11)$$

$$\mathbf{e}_{ij}^e = \frac{\partial u_i^0(x)}{\partial x_j} - \frac{\partial \mathbf{c}_i^{kl}}{\partial y_j} \frac{\partial u_k^0(x)}{\partial x_l} \quad (12)$$

$$\mathbf{s}_{ij}^e = \left(D_{ijkl}(x) - D_{ijpm}(x) \frac{\partial \mathbf{c}_p^{kl}}{\partial y_m} \right) \frac{\partial u_k^0}{\partial x_l} \quad (13)$$

2.2 有限要素法による定式化

有限要素法により、式(7) ~ (13)の近似を行った。

2.2.1 特性変位を求める

式(7)を8節点アイソパラメトリック要素[3]により離散化すると、特性変位と座標 y は次のように近似される。

$$\mathbf{c}_p^{kl} = \sum_{a=1}^{N_t} N_a(\mathbf{x}, \mathbf{h}, \mathbf{V}) \mathbf{c}_{ap}^{kl} \quad (14)$$

$$y_m = \sum_{a=1}^{N_t} N_a(\mathbf{x}, \mathbf{h}, \mathbf{V}) y_{am} \quad (15)$$

ここで、 N_t : 要素内の節点総数
 $N_a(\mathbf{x}, \mathbf{h}, \mathbf{V})$: 自然座標 $\{ \xi, \eta, \zeta \}$
 における形状関数
 $\Xi = (-1,1) \times (-1,1) \times (-1,1)$

そして、式(14)式を用いると、

$$\frac{\partial \mathbf{c}_p^{kl}}{\partial y_m} = \sum_{a=1}^{N_t} \frac{\partial N_a}{\partial y_m} \mathbf{c}_{ap}^{kl} = B_y \mathbf{c}_e \quad (16)$$

と表せる。

ここで、

$$\mathbf{c}_e = (\mathbf{c}_e^1, \mathbf{c}_e^2, \dots, \mathbf{c}_e^{N_t})^T \quad (17)$$

$$B_y = (B_y^1, B_y^2, \dots, B_y^{N_t}) \quad (18)$$

$$\mathbf{c}_e^i = \begin{pmatrix} \mathbf{c}_{i1}^{11} & \mathbf{c}_{i1}^{22} & \mathbf{c}_{i1}^{33} & \mathbf{c}_{i1}^{23} & \mathbf{c}_{i1}^{31} & \mathbf{c}_{i1}^{12} \\ \mathbf{c}_{i2}^{11} & \mathbf{c}_{i2}^{22} & \mathbf{c}_{i2}^{33} & \mathbf{c}_{i2}^{23} & \mathbf{c}_{i2}^{31} & \mathbf{c}_{i2}^{12} \\ \mathbf{c}_{i3}^{11} & \mathbf{c}_{i3}^{22} & \mathbf{c}_{i3}^{33} & \mathbf{c}_{i3}^{23} & \mathbf{c}_{i3}^{31} & \mathbf{c}_{i3}^{12} \end{pmatrix} \quad (19)$$

$$B_y^i = \begin{pmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial y_1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial y_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial y_3} \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial y_3} & \frac{\partial N_i}{\partial y_2} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y_3} & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial y_1} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y_2} & \frac{\partial N_i}{\partial y_1} & 0 \end{pmatrix} \quad (20)$$

よって、式(7)は次のように離散化できる。

$$\sum_{e=1}^{N_y} \int_{Y_e} B_y^T DB_y \mathbf{c}_e dY_e = \sum_{e=1}^{N_y} \int_{Y_e} B_y^T D dY_e \quad (21)$$

$$\sum_{e=1}^{N_y} \int_{\Xi_e} B_y^T DB_y \mathbf{c}_e |J_y| d\Xi = \sum_{e=1}^{N_y} \int_{\Xi_e} B_y^T D |J_y| d\Xi \quad (22)$$

ゆえに、

$$K_y \mathbf{c} = F_y \quad (23)$$

ここで、

$$K_y = \sum_{e=1}^{N_y} \iiint B_y^T DB_y \mathbf{c}_e |J_y| d\mathbf{x} d\mathbf{h} d\mathbf{V} \quad (24)$$

$$F_y = \sum_{e=1}^{N_y} \iiint B_y^T D |J_y| d\mathbf{x} d\mathbf{h} d\mathbf{V} \quad (25)$$

$$\mathbf{c} = \sum_{e=1}^{N_y} \mathbf{c}_e \quad (26)$$

N_y : unit cell 内の要素数、 J_y : Jacobi 行列

となり、周期境界条件を用いて式(23)~(26)を解くことにより特性変位 \mathbf{c} を求めることができる。

2.2.2 均質化弾性テンソル D^H を求める

2.2.1 項と同様に式(16)により式(10)を離散化すると、次式が得られる。

$$D^H = \frac{1}{|Y|} \sum_{e=1}^{N_y} \iiint (D - DB_y \mathbf{c}_e) |J_y| d\mathbf{x} d\mathbf{h} d\mathbf{V} \quad (27)$$

式(27)に式(23)で得られた特性変位 \mathbf{c} を代入することにより均質化弾性テンソル D^H を求めることができる。

2.2.3 マクロ変位 \mathbf{u}^0 を求める

2.2.1 項と同様に、マクロの式(8)を離散化すると、次式が得られる。

$$\sum_{e=1}^{N_x} \int_{\Omega_e} B_x^T D^H B_x u_e^0 d\Omega_e = \sum_{e=1}^{N_x} b^h + \sum_{e=1}^{N_\Gamma} t^h \quad (28)$$

ここで、

- N_x : 全体構造物内の要素数
- B_x : x 座標でのひずみ - 変位マトリックス
- u_e^0 : 要素内節点のマクロ変位
- b^h : 物体力の等価節点力
- t^h : 表面力の等価節点力

よって、式(27)で得られた均質化弾性テンソルを用いて、式(28)を解くことにより、巨視的構造の式(7)を通常の境界値問題として扱うことができる。その結果、巨視的変位 \mathbf{u}^0 、ひずみ $\boldsymbol{\epsilon}^0$ 、応力 $\boldsymbol{\sigma}^0$ を求めることができる。

2.2.4 ミクロの変位、ひずみ、応力を求める

微視的構造を考慮した変位 \mathbf{u} 、ひずみ $\boldsymbol{\epsilon}$ 、応力 $\boldsymbol{\sigma}$ 、の式(11)~(13)は式(29)~(31)のように離散化され、それぞれ得られた値を代入することにより求めることができる。

$$\mathbf{u}^e = \mathbf{u}^0 - \mathbf{e} \mathbf{c} B_x u^0 = \mathbf{u}^0 - \mathbf{e} \mathbf{c} \mathbf{e}^0 \quad (29)$$

$$\boldsymbol{\epsilon}^e_{ij} = B_x u^0 - B_y \mathbf{c} B_x u^0 = (\mathbf{I} - B_y \mathbf{c}) \mathbf{e}^0 \quad (30)$$

$$\boldsymbol{\sigma}^e_{ij} = D(\mathbf{I} - B_y \mathbf{c}) B_x u^0 = D(\mathbf{I} - B_y \mathbf{c}) \mathbf{e}^0 \quad (31)$$

2.3 プログラミング

Fortran77により均質化法プログラムを作成した。ソルバーは直接法であるスカイライン法[4]を、境界条件の挿入にはペナルティ法[5]をそれぞれ適用した。またより大きなマトリクスが解析できるようにバンド幅縮小のアルゴリズム[6]も適用した。

3. 段ボール製緩衝材への適用

段ボール製緩衝材の力学特性の解析のために、前節で作成した均質化法プログラムを、図4のような5層の段ボール製緩衝材を対象とし、その微小変形領域における静的力学特性の解析に適用した。

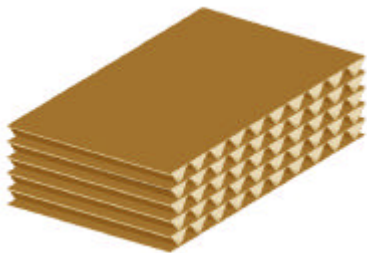


図4 5層の段ボール製緩衝材
Fig.4 5 layered Cushioning material made of corrugated fibreboards

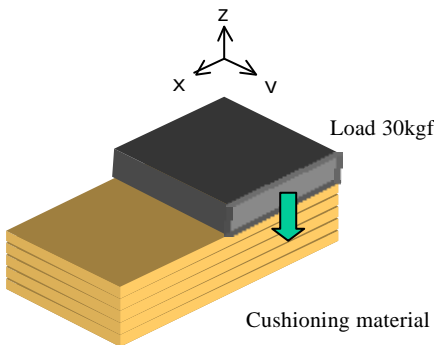


図5 緩衝材の荷重条件
Fig.5 Load condition of cushioning material

3.1 物理的条件

段ボール原紙(ライナー及び中芯原紙)の材料定数は、石淵ら[7]が使用した材料定数を用い、石淵らと同様に原紙を等方性材料として扱った。それらの値を表1に示す。

段ボール製緩衝材は両面段ボールを5層にしたものであり、幅86.0mm、奥行き50.0mm、高さ21.8mmとした。各層の段ボール形状はA段(幅:8.60mm、奥行き:

5.00mm、中芯の高さ:3.93mm)とした。

荷重条件は図5のような緩衝材の上面片側に対して30kgfの荷重とし、拘束条件は底面を全拘束とした。そして、異なる5カ所の段の変形をそれぞれ計算した。

表1 段ボール原紙の材料定数[7]

Table1 Material constants of fibreboards

	ヤング率 (kgf/mm ²)	ポアソン 比	厚さ (mm)
ライナー	189.28	0.06	0.21
中芯	86.30	0.03	0.25

3.2 微細構造(ユニットセル)

段ボールの1つの段をユニットセルとし、図6に示す有限要素モデルを作成した。その詳細を表2に、変位を求める全体構造におけるユニットセルの位置を表3に示す。

表2 ユニットセルの有限要素モデルの詳細

Table2 Specification of finite element model of unit cell

節点数	1353
要素数	600
大きさ(mm)	x=8.6, y=5.0, z=4.35
周期境界の節点数	409(対)
材料の数	2
材料1	ライナー
材料2	中芯

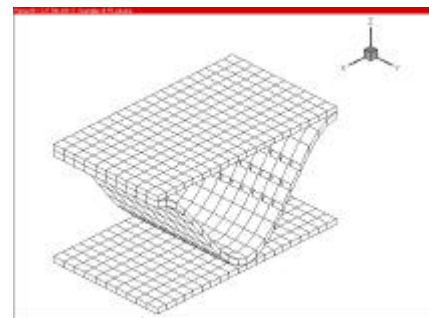


図6 段の有限要素モデル
Fig.6 Finite element model of a flute

3.3 全体構造

緩衝材全体を全体構造とし、その有限要素モデルを図7、その詳細と境界条件を表4に示す。

表3 計算するユニットセルの位置
Table3 Each position of calculated unit cells

Name of unit cell	Position		
	X	Y	Z
Unit cell 1	8.6	20.0	8.7
Unit cell 2	34.4	20.0	8.7
Unit cell 3	68.8	20.0	8.7
Unit cell 4	34.4	20.0	13.05
Unit cell 5	34.4	20.0	4.35

表4 全体構造の有限要素モデルの詳細と境界条件
Table4 Specification of finite element model and boundary conditions of global structure

節点数	2079
要素数	1600
大きさ(mm)	x=86.0, y=50.0, z=21.8
拘束条件	xy=0 面
拘束節点数	693
荷重条件	上面原点側半分の面積に 30kgf の荷重(0.50kgf/mm ²)

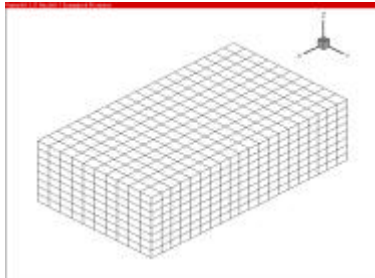


図7 全体構造の有限要素モデル
Fig.7 Finite element model of global structure



図8 全体構造の変位 (×50、以下同様)
Fig.8 Deformation of global structure
(×50, the following figures are same magnification)

3.4 結果

計算を行った全体構造の変位を図8、ユニットセルの変位を図9～図13に示す。

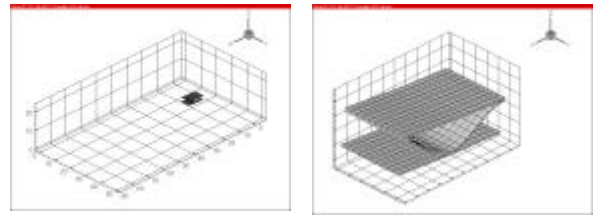


図9 ユニットセル1の変位
Fig.9 Deformation of unit cell 1

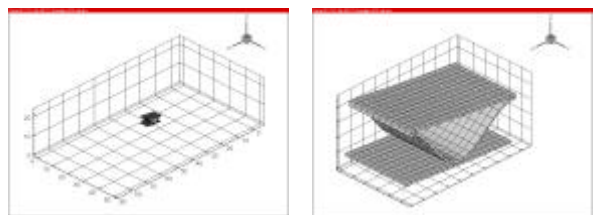


図10 ユニットセル2の変位
Fig.10 Deformation of unit cell 2

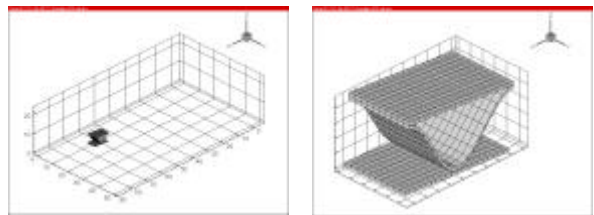


図11 ユニットセル3の変位
Fig.11 Deformation of unit cell 3

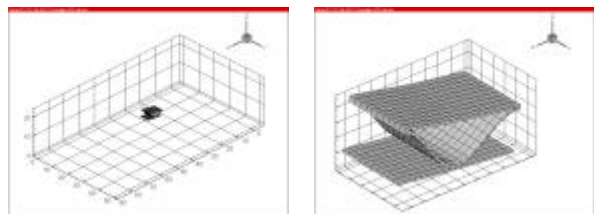


図12 ユニットセル4の変位
Fig.12 Deformation of unit cell 4

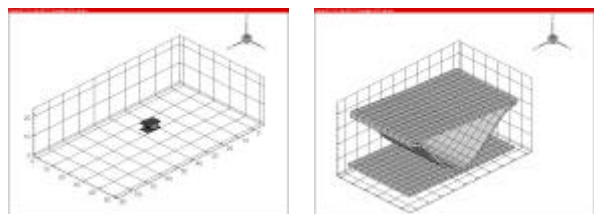


図13 ユニットセル5の変位
Fig.13 Deformation of unit cell 5

表5 段ボールの均質化弾性定数

Table5 Homogenized elastic constants of corrugated fibreboard

	ライナー	中芯	均質化弾性定数
D_{1111}	190.74	86.46	120.52
D_{1122}	12.18	2.67	7.23
D_{1212}	89.28	41.89	63.76

図9～11はユニットセルのx方向の位置の違いによる変形を、図10, 図12～13は中心位置でのz方向の位置の違いによる変形を計算した結果を示している。図8の全体構造の変形と比較してみると、荷重されている部分と荷重されていない部分でのユニットセルの変形は非常に顕著であり、その変形は全体構造の変位(図8)と一致していることがわかる。

また、微視的構造の解析で使用した表1から導出される弾性定数及び全体構造の解析で計算された均質化弾性定数の一部を表5に示す。式(10)(または式(27))で計算される均質化弾性定数は微視的構造を持った構造物が均質な構造物とした場合の等価材料定数であり、この値を用いることにより微細な構造を持った全体構造における構造物を通常の境界値問題として解析できることを示す。

4.まとめ

段ボール製緩衝材の力学特性の解析を目的に、次のようなことを行った。

(1) 段ボールの周期性に着目し、複合材料等の解析で使用されている均質化法の適用を試みるため、有限要素法による近似を行い、その定式化を行った。また、その定式化をもとにFORTRAN77によりプログラムの作成を行った。

(2) ユニットセルを段ボールの1つの段とし、緩衝材全体を全体構造とし、それぞれの有限要素モデルを作成した。

(3) 均質化法を段ボール製緩衝材の静的変形(微小変形領域)の解析への適用を行った。これにより、段ボールなどの微細構造を有した構造物の構造解析において、その有限要素モデルの作成は非常に手間がかかるものであったが、ユニットセルと全体構造の有限要素モデルの作成のみで微細構造を考慮した解析が可能となった。これにより、段ボール製品の構造解析への1つのアプローチとなることができた。

文献

- [1] Gudes, J. M. and Kikuchi, N., Processing and postprocessing for materials based on the homogenization method with adaptive finite element methods, *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, 83(1990) 143-198.
- [2] 小石ら、汎用 FEM プログラムをベースとした均質化法解析システムの開発、*機論*、59,561,A(1993),1395-1400
- [3] 鷲津久一郎、有限要素ハンドブック、(1981), 363-405, 培風館
- [4] Kikuchi, N., *Finite element methods in mechanics*, (1986), 203-209, Cambridge Univ. Press
- [5] Kikuchi, N., *Finite element methods in mechanics*, (1986), 49-52, Cambridge Univ. Press
- [6] Collins, R. J., Bandwidth reduction by automatic renumbering, *Int. J. Numer. Methods Eng.*, 6(1973), 345-356
- [7] 石淵ら、段ボールシートの三次元曲げ応力解析、*機論*、60,580,A(1994),2774-2781